II Površi u prostoru

7 Definicije površi i jednačine površi

Površ S ($S \subseteq \mathbb{R}^3$) se zadaje parametarski na sljedeći način:

$$S : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in \Delta; \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

(skalarni oblik), ili

$$S : \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

(vektorski oblik), gdje je Δ dvodimenzionalni povezan skup u ravni $u0v$, a $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ su funkcije dvije promjenjive koje su diferencijabilne, injektivne (ili 1-1) za koju vrijedi da je $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ gdje je

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}.$$

Ostali oblici jednačina površi S su

$$S : z = z(x,y), \quad (x,y) \in D \ (D \subseteq x0y)$$

(eksplicitni oblik);

$$S : F(x,y,z) = 0$$

(implicitni oblik).

1. Ravan $z = 0$ napisati u parametarskom obliku. Poslije toga istu ravan napisati u obliku

$$\{\vec{a}\lambda + \vec{b}\mu + \vec{c} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ neki konstantni vektori}\}.$$

2. Ravan $x + y = 0$ napisati u parametarskom obliku. Poslije toga istu ravan napisati u obliku

$$\{\vec{a}\lambda + \vec{b}\mu + \vec{c} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ neki konstantni vektori}\}.$$

3. Posmatrajmo jednakost

$$\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, (k^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Koju površ ova jednakost predstavlja? Odrediti koordinatne krive $u = const.$ i $v = const.$ Dati geometrisko tumačenje parametara u i v.

4. Date su površi Γ i kriva L:

$$\Gamma : \vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, au\}$$

$$L : \vec{r} = \{e^t\cos bt, e^t\sin bt, ae^t\}$$

gdje su a i b proizvoljne konstante.

(a) Napisati jednačinu površi Γ u obliku $F(x,y,z) = 0$.

(b) Dokazati da kriva L leži na površi Γ. Na kom njenom dijelu?

(c) Dokazati da je u proizvoljnoj tački na L ugao između L i v linije koja prolazi kroz tu tačku, konstantan.

[Odg. za 1: $x = \lambda, y = \mu, z = 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\{(1,0,0)^\top\lambda + (0,1,0)^\top\mu \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$]
[Odg. za 2: $x = \lambda, y = -\lambda, z = \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\{(1,-1,0)^\top\lambda + (0,0,1)^\top\mu \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$]

(#) Ravan $z=0$ napisati u parametarskom obliku.
Poslije toga istu ravan napisati u obliku
$\{\vec{a}\lambda+\vec{b}\mu+\vec{c} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ neki konstantni vektori$\}$.

R.:

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

↑ parametarski oblik prostora

U prostoru imamo tri promjenjive.
Ravan će imati dvije promjenjive.
Kriva ima samo jednu promjenjivu

$z=0$ je $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ tj. $\begin{cases}x=\lambda\\ y=\mu\\ z=0\\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\end{cases}$

Kako je $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mu$ to je

$z=0$ u stvari $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mu \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$

$\vec{a}=(1,0,0)$, $\vec{b}=(0,1,0)$, $\vec{c}=(0,0,0)$.

(#) Ravan $x+y=0$ napisati u parametarskom obliku. Poslije toga istu ravan napisati u obliku

$$\{\vec{a}\lambda+\vec{b}\mu+\vec{c} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ konstantni vektori}\}$$

R.j.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

↑ parametarski oblik prostora

Ravan će imati dvije promjenjive.

$x+y=0$ je $\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\z\end{pmatrix} \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}$ tj. $\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\lambda\\ z=\mu\\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\end{cases}$

$y=-x$

Kako je $\begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mu$ to je

$x+y=0$ u stvari $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mu \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$.

$\vec{a}=(1,-1,0)$, $\vec{b}=(0,0,1)$, $\vec{c}=(0,0,0)$.

(#) Posmatrajmo jednakost

$$\vec{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ (k^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

(a) Koju površinu ova jednakost predstavlja

(b) Odrediti koordinatne krive $u=\text{const.}$ i $v=\text{const.}$

(c) Dati geometrisko tumačenje parametara u i v.

Rj.

$$\vec{r}: \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = (k^2-u^2)^{\frac{1}{2}} \\ \quad u \in [-k, k] \\ \quad v \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

vrijednosti za ove parametre vidimo iz definicije površi

Kako je $x^2+y^2+z^2 = u^2+k^2-u^2 = k^2$ to imamo

$$\vec{r}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = k^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

da je $\vec{r}$ dio sfere poluprečnika k sa centrom u koordinatnom početku koja se nalazi iznad xOy-ravni.

Ako je v konstanta npr. $v=c$ tada

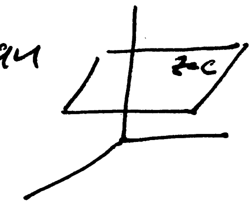
$$\vec{r}: \begin{cases} x = u\cos c \\ y = u\sin c \\ z = (k^2-u^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} c \Rightarrow y = x\underbrace{\operatorname{tg} c}_{=\text{const}} \quad \ldots(1)$$

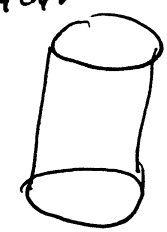
$$x^2+y^2+z^2 = u^2+k^2-u^2 = k^2 \quad \ldots(2)$$

Iz (1) i (2) vidimo da je u-kriva presjek ravni (koja sadrži z-osu i u xOy-ravni prolazi kroz pravu $y = x\operatorname{tg} c$) i sfere $x^2+y^2+z^2=k^2$. Ove krive se zovu merdijani sfere.

Kada je $u=c$ imamo

$$\vec{r}: \begin{cases} x = c\cos v \\ y = c\sin v \\ z = \sqrt{k^2 - c^2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} z = const \quad \text{ravan} \\ x^2 + y^2 = c^2 \quad \text{cilindar} \end{array}$$

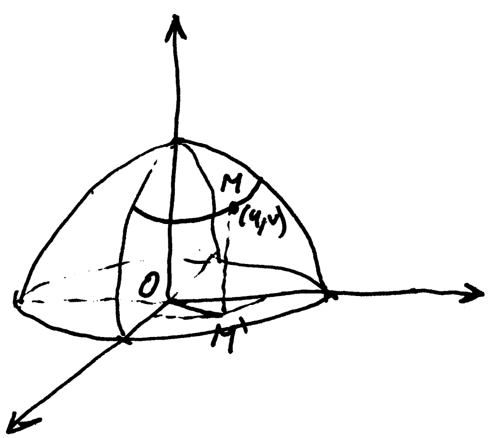




da su v-krive krive dobijene kao presjek sfere sa ravni koja je paralelna xOy ravni. Ove krive se zovu paralele sfere.

Udaljenost tačke (u,v) od z-ose je data pomoću parametra u, dok je v tačka paralele M takva da se OM' nalazi na nekom rastojanju φ (φ je ugao) u odnosu na neki fiksirani pravac u xOy-ravni.

(M' je ortogonalna projekcija tačke M).



(#) Date su površi Γ i kriva L:

$$\Gamma: \vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, au\}$$
$$L: \vec{r} = \{e^t\cos bt, e^t\sin bt, ae^t\}$$

(a) Napisati jednačinu površi Γ u obliku $F(x,y,z)=0$.

(b) Dokazati da kriva L leži na površi Γ. Na kom njenom dijelu?

(c) Dokazati da je u proizvoljnoj tački na L ugao između L i v-linije koja prolazi kroz tu tačku konstantan.

Rj.:

(a)

$$\Gamma: \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = au \end{cases}$$

$$x^2+y^2 = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2$$

$$x^2+y^2 = u^2 \Rightarrow a^2(x^2+y^2) = a^2u^2 \quad \ldots(1)$$

$$z^2 = a^2u^2 \quad \ldots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$

$$a^2(x^2+y^2) - z^2 = 0$$

(b)

$$L: \begin{cases} x = e^t\cos bt \\ y = e^t\sin bt \\ z = ae^t \end{cases}$$

Ako uvrstimo koordinate proizvoljne tačke krive L u jednačinu površi Γ imamo

$$a^2(e^{2t}\cos^2 bt + e^{2t}\sin^2 bt) - a^2e^{2t} = a^2e^{2t} - a^2e^{2t} = 0$$

Kako sve tačke krive L pripadaju površi Γ to kriva L leži na površi Γ. Kako je $z = ae^t$ i $a>0$ to je $z>0$

za sve tačke krive L, kriva L je na ovom dijelu površi Γ koji je iznad xOy ravni.

(c)

Koordinatne v-linije površi Γ dobijemo kada za promjenjivu u stavimo neku konstantu npr. c

v-linije su oblika $\begin{cases} x = c\cos v \\ y = c\sin v \\ z = ac \end{cases}$

Ugao između proizvoljne tačke na L i v-linije koja prolazi kroz tu tačku je ugao između tangente na L u toj tački i tangente na v-liniju u toj tački. Vektori ovih tangenti ćemo, redom, označiti sa $\vec{t_1}$ i $\vec{t_2}$

$$\vec{t_1} = \{e^t(\cos bt - b\sin bt),\ e^t(\sin bt + b\cos bt),\ ae^t\}$$

$$\vec{t_2} = \{-c\sin v,\ c\cos v,\ 0\} \quad (c = \text{const.}).$$

$$\vec{t_1}\cdot\vec{t_2} = e^t(-c\sin v\cos bt + bc\sin v\sin bt + c\sin bt\cos v + bc\cos v\cos bt + 0)$$

Ako je M zajednička tačka krivoj L i liniji v imamo

$$\begin{aligned} u\cos v &= e^t\cos bt \\ u\sin v &= e^t\sin bt \\ au &= ae^t \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u &= e^t \\ v &= bt \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t &= \ln u \\ v &= b\ln u \end{aligned}$$

U našem slučaju za u smo uzeli c pa je $t = \ln c$, $v = b\ln c$.

Sad ako u tački M izračunamo $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ imamo

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = c\,(\underline{-c\sin(b\ln c)\cos(b\ln c)} + bc\sin(b\ln c)\,(b\ln c)$$

$$\underline{+\,c\sin(b\ln c)\cos(b\ln c)} + bc\cos(b\ln c)\cos(b\ln c))$$

$$= c\cdot bc = bc^2$$

Slično

$$|\vec{r}_1|^2 = e^{2t}(\cos^2 bt \underline{\cancel{-2b\cos bt\sin bt}} + b^2\sin^2 bt$$

$$+\sin^2 bt \underline{\cancel{+2b\sin bt}\cos bt} + b^2\cos^2 bt + a^2) =$$

$$= e^{2t}(1+b^2+a^2)$$

$|\vec{r}_1| = e^t\sqrt{1+b^2+a^2}$ a kako je $t = \ln c$ to je

$$|\vec{r}_1| = c\sqrt{1+b^2+a^2}$$

$$|\vec{r}_2|^2 = c^2\sin^2 v + c^2\cos^2 v = c^2 \Rightarrow |\vec{r}_2| = c$$

Prema tome

$$\cos\measuredangle(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}{|\vec{r}_1|\,|\vec{r}_2|} = \frac{b}{\sqrt{1+b^2+a^2}} = \text{konst.}$$